Алгебра

Квадратные уравнения

1. $x^2+px+q=0;\qquad x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$

$ax^2+bx+c=0;\qquad x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\qquad (a\neq 0).$

$ax^2+2kx+c=0;\qquad x_{1,2}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}\qquad (a\neq 0).$

2. Формулы Виета:

$x_1+x_2=-p=-\frac{b}{a};\quad x_1x_2=q=\frac{c}{a}.$

3. $x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2);$

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$

Прогрессии

а) Арифметическая прогрессия.

1. Общий член арифметической прогрессии:

$$a_n=a_1+(n-1)d.$$

2. Сумма n членов арифметической прогрессии:

$$S_n=\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)n=\left(\frac{2a_1+(n-1)d}{2}\right)n;$$

где d – разность.

б) Геометрическая прогрессия.

1. Общий член геометрической прогрессии:

$$u_n=u_1q^{n-1}.$$

2. Сумма n членов геометрической прогрессии:

$$S_n=\frac{u_1-u_nq}{1-q}=u_1\frac{1-q^n}{1-q}=u_1\frac{q^n-1}{q-1},$$

где q – знаменатель прогрессии ($q \neq 1$).

3. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$S = \frac{u_1}{1-q}.$$

Логарифмы

1. Запись $\log_a N = x$ равносильна записи $a^x = N$ $(a > 0, a \neq 1, N > 0)$, так что $a^{\log_a N} = N$.
2. $\log_a 1 = 0$.
3. $\log_a a = 1$.
4. $\log_a(N \cdot M) = \log_a N + \log_a M$.
5. $\log_a \frac{N}{M} = \log_a N - \log_a M$.
6. $\log_a N^n = n \log_a N$.
7. $\log_a \sqrt[n]{N} = \frac{1}{n} \log_a N$.
8. $\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$.

Геометрия

Планиметрия

Площадь треугольника

$$S = \frac{ah}{2} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = rp = \frac{bc\sin A}{2} =$$

$$= \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C = p^2 \operatorname{tg}\frac{A}{2} \operatorname{tg}\frac{B}{2} \operatorname{tg}\frac{C}{2},$$

где p — полупериметр, h — высота, r — радиус вписанной окружности.

Площадь параллелограмма

$$S = ah,$$

где a — сторона параллелограмма, h — его высота, опущенная на сторону a.

Площадь прямоугольника

$$S = ab,$$

где a и b — стороны прямоугольника.

Площадь квадрата

$$S = a^2,$$

где a — сторона квадрата.

Площадь ромба

$$S = ah = \frac{d_1 d_2}{2},$$

где d_1 и d_2 — диагонали ромба.

Площадь трапеции

$$S = \frac{(a+b)h}{2},$$

где a и b — основания, h — высота трапеции.

Площадь правильного многоугольника

$$S = pk,$$

где p — полупериметр, k — апофема.

Длина окружности

$$C = 2\pi R.$$

Длина дуги (в $n°$)

$$l = \frac{2\pi R n°}{360°} = \frac{\pi R n°}{180°}.$$

Площадь круга

$$S = \pi R^2.$$

Площадь сектора

$$S = \frac{\pi R^2 n°}{360°} = \frac{\pi R n°}{180°} \cdot \frac{R}{2} = \frac{lR}{2},$$

где l — длина дуги сектора.

Радиус вписанной в треугольник окружности

$$r = \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}},$$

где a, b, c — стороны треугольника, а $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Радиус описанной окружности

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

Стереометрия

Боковая поверхность призмы

$$S_б = pl,$$

где p — периметр перпендикулярного сечения, l — длина ребра.

Боковая поверхность правильной пирамиды

$$S_б = pk,$$

где p — полупериметр основания, k — апофема.

Боковая поверхность правильной усеченной пирамиды

$$S_б = \frac{(P_1 + P_2)k}{2},$$

где P_1, P_2 — периметры соответственно верхнего и нижнего оснований, k — апофема.

Боковая поверхность круглого цилиндра

$$S_б = 2\pi Rh.$$

Боковая поверхность конуса

$$S_б = \pi Rl,$$

где l — образующая.

Боковая поверхность усеченного конуса

$$S_б = \pi l(R + r),$$

где l — образующая, R и r — радиусы оснований.

Поверхность шара

$$S = 4\pi R^2,$$

где R — радиус шара.

Объем призмы

$$V = Sh,$$

где S — площадь основания, h — высота.

Объем куба

$$V = a^3,$$

где a — ребро куба.

Объем пирамиды

$$V = \frac{Sh}{3},$$

где S — площадь основания, h — высота пирамиды.

Объем усеченной пирамиды

$$V = \frac{h}{3}\left(S + s + \sqrt{Ss}\right),$$

где S и s — соответственно площади нижнего и верхнего оснований, h — высота.

Объем цилиндра

$$V = \pi R^2 h.$$

Объем конуса

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3}.$$

Объем усеченного конуса

$$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr).$$

Объем шара

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Объем сферического сектора

$$V = \frac{SR}{3} = \frac{2}{3}\pi R^2 h$$

где S — поверхность сегмента, R — радиус шара, h — высота сегмента, который является основанием сектора.

Объем сферического сегмента

$$V = \frac{1}{6}\pi h(3r^2 + h^2) = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h),$$

где R — радиус шара, h — высота сегмента, r — радиус основания сегмента.

Тригонометрия

Таблица знаков и некоторых значений тригонометрических функций

Название функции	Четверти				I					II	III	IV
	I	II	III	IV	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin\alpha$	+	+	–	–	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1	0
$\cos\alpha$	+	–	–	+	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	+	–	+	–	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	+	–	+	–	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0	∞

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же угла

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$
2. $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$
3. $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha.$
4. $\sin\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha = 1.$
5. $\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1.$
6. $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1.$
7. $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha.$
8. $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha.$

Таблица формул приведения

Угол / Функция	$-\alpha$	$90° \mp \alpha$	$180° \mp \alpha$	$270° \mp \alpha$	$360°k \mp \alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$
cos	$+\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$+\cos\alpha$
tg	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\pm\operatorname{ctg}\alpha$	$\mp\operatorname{tg}\alpha$	$\pm\operatorname{ctg}\alpha$	$\mp\operatorname{tg}\alpha$
ctg	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\pm\operatorname{tg}\alpha$	$\mp\operatorname{ctg}\alpha$	$\pm\operatorname{tg}\alpha$	$\mp\operatorname{ctg}\alpha$

Преобразования тригонометрических выражений

1. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$;

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$;

$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$.

2. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$;

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$;

$\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$.

3. $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$;

$\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$;

$\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$;

4. $\sin\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$; $\quad\cos\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$;

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$.

5. $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$; $\quad\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$.

6. $\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha\mp\beta}{2}$;

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$; $\quad\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \dfrac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$.

7. $$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)\,x];$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)\,x];$$

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)\,x].$$

Обратные тригонометрические функции

1. $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}, \quad \sin(\arcsin x) = x.$
2. $0 \le \arccos x \le \pi, \quad \cos(\arccos x) = x.$
3. $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x.$
4. $0 < \operatorname{arcctg} x < \pi, \quad \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x.$

Простейшие тригонометрические уравнения

1. $\sin x = a, \qquad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n.$
2. $\cos x = a, \qquad x = \pm \arccos a + 2\pi n.$
3. $\operatorname{tg} x = a, \qquad x = \operatorname{arctg} a + \pi n.$
4. $\operatorname{ctg} x = a, \qquad x = \operatorname{arcctg} a + \pi n.$

$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$