

Показательные и логарифмические уравнения

Логарифмом положительного числа y при основании a ($a > 0, a \neq 1$) называется показатель степени x , в которую нужно возвести a , чтобы получить y

$$(\log_a y = x) \Leftrightarrow (a^x = y).$$

Пример 1.

Упростить

$$\sqrt{\log_6^5 \sqrt{25} + \log_8^7 \sqrt{49}}.$$

Решение.

Преобразуем первое слагаемое под радикалом:

$$\log_6^5 \sqrt{25} = 25 \frac{1}{\log_6 5} = 25 \log_5 6 = 25 \log_{25} 36 = 36.$$

Аналогичным образом преобразуем второе слагаемое под радикалом

$$\log_8^7 \sqrt{49} = 49 \frac{1}{\log_8 7} = 49 \log_7 8 = 49 \log_{49} 64 = 64.$$

Окончательно имеем $\sqrt{36 + 64} = 10$.

Ответ: 10.

Пример 2.

Доказать, что

$$3^{\log_3^2 x} = x^{\log_3 x},$$

если $x > 0$.

Решение.

Преобразуем левую часть равенства

$$3^{(\log_3 x)^2} = (3^{\log_3 x})^{\log_3 x}.$$

Так как $3^{\log_3 x} = x$, то имеем $(3^{\log_3 x})^{\log_3 x} = x^{\log_3 x}$, что и требовалось доказать.

Пример 3.

Вычислить без таблиц

$$x = 10^{1 - \log_{100} 4} + 7^{2 - \log_{49} 100}.$$

Решение.

$$x = \frac{10}{10^{\log_{100} 4}} + \frac{7^2}{7^{\log_{49} 100}} = \frac{10}{10^{\log_{10} 2}} + \frac{49}{7^{\log_7 10}} = \frac{10}{2} + \frac{49}{10} = 9,9.$$

Ответ: $x = 9,9$.

Пример 4.

Доказать, что

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a},$$

где a, b, c — положительные числа, $c \neq 1$.

Решение.

Рассмотрим равносильные равенства

$$(\log_c b \log_c a = \log_c a \log_c b) \Leftrightarrow (\log_c (a^{\log_c b}) = \log_c (b^{\log_c a})) \Leftrightarrow (a^{\log_c b} = b^{\log_c a}).$$

Пример 5.

Решить уравнение

$$\sqrt[4]{(x-3)^{x+1}} = \sqrt[3]{(x-3)^{x-2}}.$$

Решение.

Выполняя преобразования, имеем

$$(x-3)^{\frac{x+1}{4}} = (x-3)^{\frac{x-2}{3}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{4} = \frac{x-2}{3} \\ x-3 = 1 \\ x-3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 \\ x = 4 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Ответ: $x \in \{3; 4; 11\}$.

Пример 6.

Решить уравнение

$$9^{\log_{\frac{1}{3}}(x+1)} = 5^{\log_{\frac{1}{5}}(2x^2+1)}.$$

Решение.

Преобразуем обе части уравнения:

$$\left(9^{\log_{3^{-1}}(x+1)} = 5^{\log_{5^{-1}}(2x^2+1)}\right) \Leftrightarrow \left(9^{\log_9(x+1)^{-2}} = 5^{\log_5(2x^2+1)^{-1}}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left((x+1)^{-2} = (2x^2+1)^{-1}\right) \Leftrightarrow \left((x+1)^2 = 2x^2+1\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Ответ: $x \in \{0; 2\}$.

Пример 7.

Решить уравнение

$$\lg^2 x^3 - 20 \lg \sqrt{x} + 1 = 0.$$

Решение.

Сделаем преобразование $\lg^2 x^3 = (3 \lg x)^2$, тогда

$$(9(\lg x)^2 - 10 \lg x + 1 = 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x = y \\ 9y^2 - 10y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lg x = y \\ y = 1 \\ y = \frac{1}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ x = \sqrt[9]{10} \end{cases}$$

Ответ: $x \in \{10; \sqrt[9]{10}\}$.

Пример 8.

Решить уравнение

$$33 \cdot 2^{x-1} - 4^{x+1} = 2.$$

Решение.

Выполним преобразования

$$\left(33 \cdot \frac{2^x}{2} - 4^x \cdot 4 = 2\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = y \\ \frac{33}{2}y - 4y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = y \\ y = 4 \\ y = \frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$$

Ответ: $x \in \{-3; 2\}$.

Пример 9.

Решить уравнение

$$3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1}.$$

Решение.

Выполним преобразования

$$\begin{aligned} &\left(3 \cdot 4^x - 6 \cdot 4^x \cdot 4 = -\frac{1}{3} \cdot 9^x \cdot 9^2 - \frac{1}{2} \cdot 9^x \cdot 9\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(4^x(3 - 24) = 9^x \left(-27 - \frac{9}{2}\right)\right) \Leftrightarrow \left(4^x \cdot 21 = 9^x \cdot \frac{63}{2}\right) \Leftrightarrow \left(4^x = 9^x \cdot \frac{3}{2}\right). \end{aligned}$$

Разделив обе части уравнения на 9^x , получим

$$\left(\frac{4^x}{9^x} = \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow \left(\left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right) \Rightarrow (2x = -1) \Leftrightarrow \left(x = -\frac{1}{2}\right).$$

Ответ: $x \in \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

Литература

- Элементарная математика. Решение задач. В.М. Алексеев. Киев «Вища школа» 1984.